dev : décomposition de Dunford + exp matrice

leçons : 150, 151, 153, 154, 155, 156.
réf : Gourdon + Rombaldi.

Thm : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tq χ_u est scindé sur $\mathbb{K}$.
Il existe un unique couple $(d,n) \in \mathcal{L}(E)^2$ avec d diagonalisable, n nilpotente et tq
i) $d \circ n = n \circ d$ ii) $u = n + d$.

dém :
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tq $\chi_u = (-1)^n \prod_{i=1}^{s} (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$.

Existence :
$E = \bigoplus_{i=1}^{s} N_i$ où $N_i = \ker(u - \lambda_i)^{\alpha_i}$ sous-espace caractéristiques.

Il suffit donc de définir d et n sur N_i et on pose alors pour tout $i \in [\![1,s]\!]$:
$d_i := d|_{N_i} = \lambda_i Id_{N_i}$ et $n_i := n|_{N_i} = u - \lambda_i Id_{N_i}$

N_i est stable par d_i et $n_i = u - d_i$ donc $d_i, n_i \in \mathcal{L}(N_i)$

ii) * $\forall i$ $d_i + n_i = u|_{N_i}$ donc $d + n = u$.

* d diagonalisable : d_i est diagonale sur N_i, pour tout i, donc d est diagonalisable
comme homothétie.

* n nilpotent : on sait que pour tout i, $n_i^{\alpha_i} = 0$ sur N_i (par déf N_i)
Posons $\alpha = \sup_{1 \le i \le n} \alpha_i$. On a alors $n^\alpha = 0$ sur chaque N_i d'où $n^\alpha = 0$ sur E.

ce qui montre que n est nilpotente.

i) * $d_i \circ n_i = n_i \circ d_i$ pour tout i (car d_i est une homothétie)
donc d et n commutent sur chaque N_i puis sur E.

(d,n) est donc un tel couple, ce qui conclut l'existence.
Notons que d et n sont en fait des CL des projecteurs de E sur N_i qui sont des pol en u donc
d et n sont également des pol en u.

Unicité :
Soit (d', n') un autre couple vérifiant les conditions. (On reprend notations N_i préc)

d et n sont des pol en u donc commutent avec u puis $d', n' \in \mathbb{K}[u]$?

* $u \circ d' = d' \circ u$ donc N_i est stable par d' pour tout i.
($u \circ d' = (d' + n') d' = d'(d' + n') = d' \circ u$
N_i stable : $x \in N_i$: $(u - \lambda_i)^{\alpha_i}(d'(x)) = d'((u - \lambda_i)^{\alpha_i}(x)) = d'(0) = 0$ $\Rightarrow d'(x) \in N_i$
réc α ⊗ commute)

De plus $d|_{N_i} = \lambda_i Id_{N_i}$ donc d et d' commutent sur chaque N_i.
Par le thm de codiagonalisation, ils sont diagonalisables dans une même base
et $d - d'$ est diagonalisable.

* $n = u - d$ et $n' = u - d'$ commutent (car u, d, d' commutent 2 à 2 entre eux).
Notons p et q leurs indices de nilpotence respectifs.
$$(n - n')^{p+q} = \sum_{k=0}^{p+q} \binom{p+q}{k} \underbrace{n^k}_{=0 \text{ si } k \ge p} (-n')^{p+q-k} = \sum_{k=0}^{p-1} \binom{p+q}{k} n^k \underbrace{(-n')^{p+q-k}}_{p+q-k \ge p+q-p+1 \text{ d'où } = 0} = 0$$

Ainsi $d - d' = n - n'$ est diagonale et nilpotent donc nul et $d = d'$ et $n = n'$.

app : Si χ_A est scindé : A diagonalisable $\Leftrightarrow$ e^A diagonalisable.

dem :

$\boxed{\Rightarrow}$ toujours (donc osef)

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons e^A diagonalisable.

χ_A est scindé donc A admet une décomposition de Dunford : $A = D + N$.

$$\begin{aligned} e^A &= e^D e^N && \text{car } D, N \text{ commutent} \\ &= e^D \left(\sum_{k=0}^{q-1} \frac{N^k}{k!} \right) && \text{où } \mathrm{nil}(N) = q. \\ &= e^D + e^D \sum_{k=1}^{q-1} \frac{N^k}{k!} && \text{on dvp p/ à } 1^{er} + \\ &= e^D + N \underbrace{e^D \sum_{k=1}^{q-1} \frac{N^{k-1}}{k!}}_{:= M} && (*) \end{aligned}$$

N et M commutent donc $(NM)^q = N^q M^q = 0$ et NM est nilpotente.
De plus, e^D et NM commutent donc par unicité, $(*)$ est la décomposition de Dunford de e^A. (χ_A scindé : passer ss silence, trouver justif° pour q°)

e^A étant diagonalisable, (par hypothèse) on a que sa partie nilpotente est nulle :

$$\begin{aligned} e^D (e^N - I) = 0 &\Leftrightarrow e^N - I = 0 && \text{car } e^D \in Gl_n(\mathbb{R}). \\ &\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{q-1} \frac{N^k}{k!} = 0 \end{aligned}$$

$P(X) = \sum_{k=1}^{q} \frac{X^k}{k!}$ est un polynôme annulateur de N (on rajoute terme q peu d'importance car on le perd après)

d'où $X^q = \mu_N \mid P$ et $1 = \frac{1}{q!} \Rightarrow q = 1$ car X^q, P de m̂ degré.

donc $N = 0$ et $A = D$ est diagonalisable.